Matrizenrechnung
Anwendungen

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Datei Nr. 62060

Stand 23. 7. 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Drehungen in der xy-Ebene wurden bereits im Text 21211 besprochen. Sie gehören zu den sogenannten affinen Abbildungen, und speziell zu den Kongruenzabbildungen.

In diesem Text wird das Geschehen in den Raum verlagert. Dann wird nicht mehr um einen Punkt gedreht, sondern um eine Drehachse. Dabei beschränke ich mich auf Drehungen um die Koordinatenachsen. Es gibt allerdings einen sehr interessanten Spezialfall, nämlich die Drehung um die Raumdiagonale, deren Abbildungsmatrix überraschend einfach ist.

Inhalt

1 Drehung um die z-Achse 3

1.1 Drehung in der xy-Ebene um den Ursprung (Herleitung) 3

1.2 Drehung im Raum und die z-Achse 5

Beispiel: Drehung eines Vierecks 7

Beispiel: Drehung eines Würfels 8

2 Drehung um die x-Achse 9

Beispiel: Drehung eines Würfels 10

3 Drehung um die y-Achse 11

Trigonometrische Herleitung der Abbildungsgleichung 12

4 Zusammenstellung der Drehungsgleichungen 14

5 Verkettung zweier Drehungen 15

Zwei Doppeldrehungen eines Würfels 16

6 Spezialaufgabe: Drehung um die Raumdiagonale um 120° 18

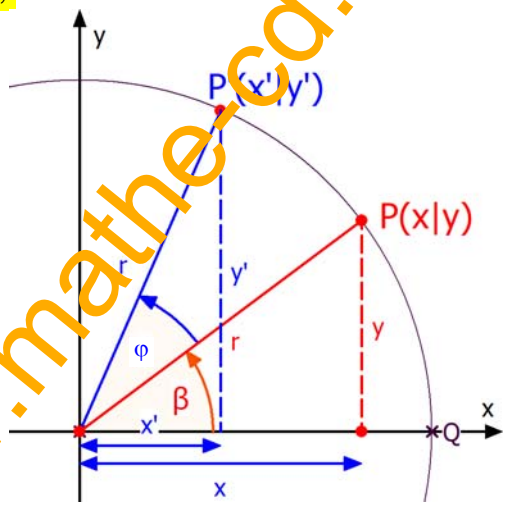
Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Drehungen um die z-Achse

1.1 Drehung in der xy-Ebene um den Ursprung

Bezeichnet man das Urbild mit $P(x\,|\,y)$ und den Bildpunkt, der durch eine Drehung um den Ursprung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn entsteht mit $P'(x'\,|\,y')$, dann kann man die Koordinaten des Bildpunktes durch diese Abbildungsgleichungen berechnen:

$$\begin{Bmatrix} x' = x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi \\ y' = x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi \end{Bmatrix}.$$



Diese Gleichungen kann man wie folgt herleiten.

Man kann die Lage der Punkte P und P' auch durch Angabe ihrer Polarkoordinaten bestimmen. Das sind der Radius (vom Ursprung aus gesehen) und der Winkel gegen die positive x-Richtung.

Für $P(x\,|\,y)$ gilt: $\begin{Bmatrix} x = r\cdot\cos\beta \\ y = r\cdot\sin\beta \end{Bmatrix}$

Für $P'(x'\,|\,y')$ gilt: $\begin{Bmatrix} x' = r\cdot\cos(\beta+\varphi) \\ y' = r\cdot\sin(\beta+\varphi) \end{Bmatrix}$ (1)

Für Winkelsummen gibt es diese trigonometrischen Umrechnungsformeln:

$$\cos(\beta+\varphi) = \cos\beta\cdot\cos\varphi - \sin\beta\cdot\sin\varphi$$
$$\sin(\beta+\varphi) = \cos\beta\cdot\sin\varphi + \sin\beta\cdot\cos\varphi$$

Damit wird aus (1): $x' = r\cdot(\cos\beta\cdot\cos\varphi - \sin\beta\cdot\sin\varphi) = \underbrace{r\cdot\cos\beta}_{x}\cdot\cos\varphi - \underbrace{r\cdot\sin\beta}_{y}\cdot\sin\varphi$

$y' = r\cdot(\cos\beta\cdot\sin\varphi + \sin\beta\cdot\cos\varphi) = \underbrace{r\cdot\cos\beta}_{x}\cdot\sin\varphi + \underbrace{r\cdot\sin\beta}_{y}\cdot\cos\varphi$

Ergebnis: $\begin{Bmatrix} x' = x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi \\ y' = x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi \end{Bmatrix}$

Beispiel (1) Drehe den Punkt $A(3\,|\,4)$ um den Ursprung um 60°.

$$\begin{Bmatrix} x' = 3\cdot\cos 60^\circ - 4\cdot\sin 60^\circ \\ y' = 3\cdot\sin 60^\circ + 4\cdot\cos 60^\circ \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' = 3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \approx -1{,}96 \\ y' = 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \approx 4{,}60 \end{Bmatrix}$$

Ergebnis: $A'\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\,|\,\frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right)$ Mit Näherungswerten: $A'(-1.96\,|\,4{,}60)$

Drehungen muss man auch konstruieren können, hier die zugehörige Darstellung:

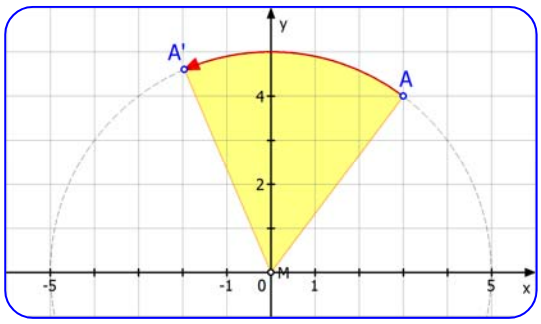


Abb. 1

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Man kann die **Abbildungsgleichungen in Matrixform** schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Lösung unserer Aufgabe sieht dann so aus:

Drehung um 60°:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jetzt setzt man den gegebenen Punkt $A(3\,|\,4)$ bzw. seinen Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $A'\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\,|\,\frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right)$ mit den Näherungswerten: $A'(-1{,}96\,|\,4{,}60)$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2 Drehung im Raum um die z-Achse

Man unterscheidet bei Koordinatensystem zwischen Rechtssystem und Linkssystem:

Abb. 1

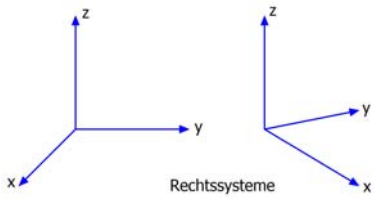
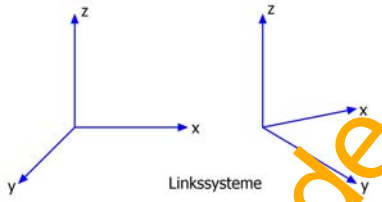


Abb. 2



In der Mathematik sind Rechtssysteme üblich.

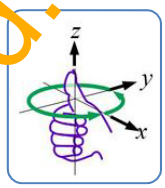


Abb. 3

Die xy-Ebene ist je bekanntlich im Raum eingebettet, d. h. „nach oben“ gibt es die z-Achse. Das Problem, ob in Abb. 3 der z-Achsenpfeil nach vorne (links unten) oder nach hinten zeigen muss, kann man mit der rechten Hand klären. Zeigt der Daumen in Richtung z-Achse, dann zeigen die gekrümmten Finger an, wie man die x-Achse auf die y-Achse drehen muss. Das ist die mathematisch positive Drehrichtung, siehe Abb. 3.
(Quelle: *https://www2.physki.de/PhysKi/index.php/Rechtssystem*).

Also ist die z-Achse in Abb. 3 richtig eingezeichnet: Daumen auf den Betrachter, dann zeigen die Finger die Drehung gegen den Uhrzeigersinn an. Analoges gilt für Abb. 5: Daumen nach oben, … .

Dann sieht die „ebene Drehung“ im Raum so aus:

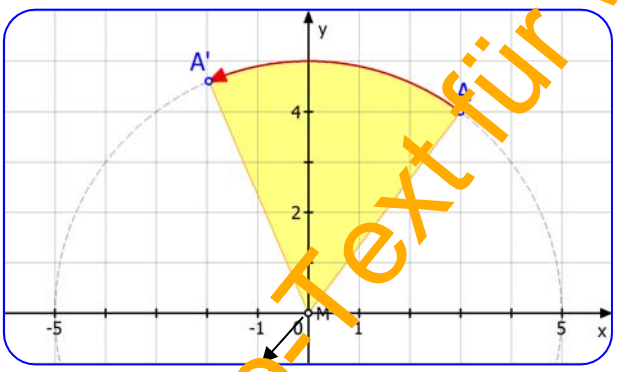


Abb. 3

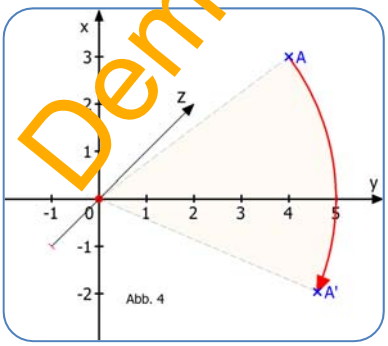


Abb. 4

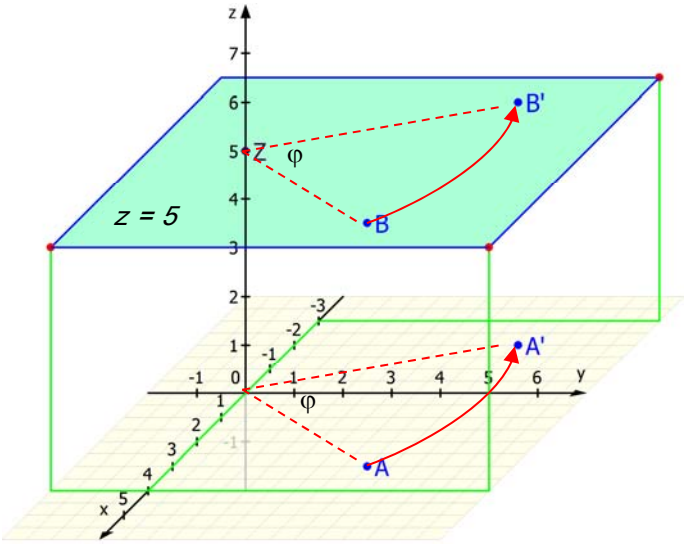


Abb. 5

Schaut man also gegen die z-Achsenrichtung auf die xy-Ebene, dann wird gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
Blickt man wie in Abb. 4 von unten auf die xy-Ebene, also in Richtung der z-Achse, dann erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.
Verwirrend?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Nun Berechnungen zu unseren Abbildungen 3 bis 5.

Beispiel 1

In der xy-Ebene ist der Punkt $A(3\,|\,4)$ gegeben, im Raum (Abb. 5) ist er $A(3\,|\,4\,|\,0)$.

Durch die Drehung entsteht daraus $A'(-1{,}96\,|\,4{,}60)$ bzw. im Raum $A'(-1{,}96\,|\,4{,}60\,|\,0)$.

Und hier die **<u>Berechnungen</u>** dazu:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, wie die Drehmatrix des $\mathbb{R}^2$ in die Drehmatrix des $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.
Die letzte Spalte sorgt dafür, dass die z-Koordinate 0 erhalten bleibt.

In Abb. 5 sehen wir eine zur xy-parallele Ebene E* in der Höhe 5 über der xy-Ebene. Ihre Gleichung ist $\boxed{z = 5}$. Die Drehung um die z-Achse bewegt auch ihre Punkte. Das heißt:

Aus $B(3\,|\,4\,|\,5)$ wird der Bildpunkt $B'(-1{,}96\,|\,4{,}60\,|\,5)$. Mittelpunkt der Kreisbahn ist $M_5\,(0\,|\,0\,|\,5)$

Und so werden die Koordinaten von B‘ berechnet: $\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichung für die Drehung um die z-Achse:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2

Drehe das Viereck $A(1|2|0), B(-2|4|0), C(-2|4|3), D(-2|4|3)$ um die z-Achse. um 270°.

Die Drehmatrix lautet dann:

$$\begin{pmatrix} \cos 270^{\circ} & -\sin 270^{\circ} & 0 \\ \sin 270^{\circ} & \cos 270^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

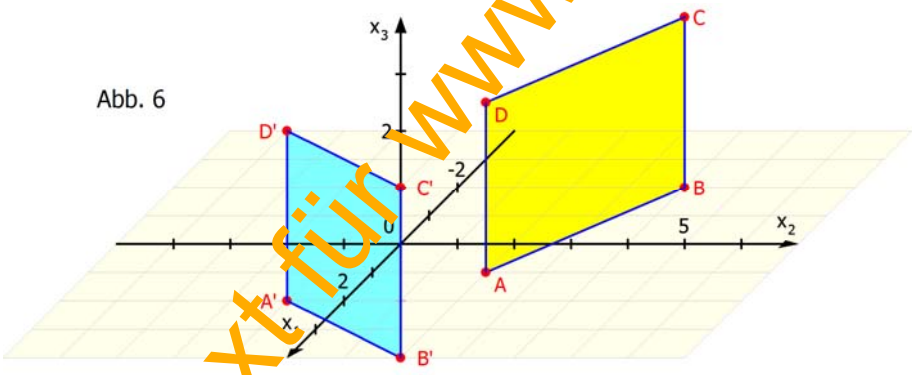
Die gemeinsame Berechnung <u>aller</u> Bildpunkt-Koordinaten geschieht dadurch, dass man die Ortsvektoren der vier Eckpunkte in eine 4x3-Matrix zusammenfasst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

In der Ergebnismatrix habe ich hier die Namen der Bildpunkt in eine Zeile oberhalb der eigentlichen Ergebnismatrix gelistet. Das verschafft Übersicht!

(Die Darstellung wurde mit MatheGrafix Version 12 erstellt.)

Abb. 6



Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 3: Drehung eines Würfels

Drehe den Würfel mit

$A(0|0|0), B(2|0|0), C(2|2|0), D(0|2|0)$

$E(0|0|2), F(2|0|2), G(2|2|2), H(0|2|2)$

a) um 45° um die z-Achse.

b) um 120° um die z-Achse

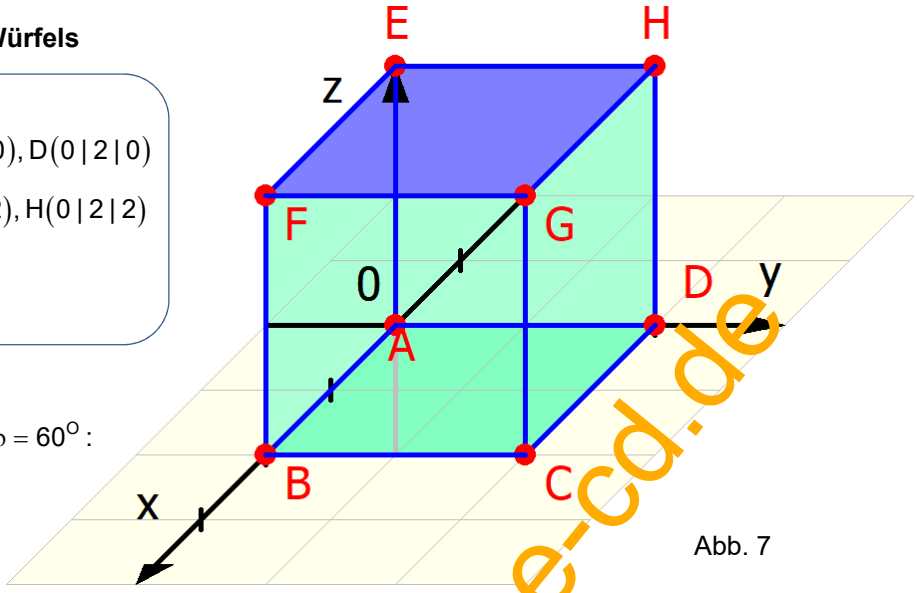


Abb. 7

a) Abbildungsgleichung für $\varphi = 60^{O}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Berechnung aller acht Bildecken mittels einer "Sammelmatrix": (Abb. 8)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Und nun noch eine Drehung von Abb. 1 ausgehend um $\varphi = 120^{O}$: (Abb. 6)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & -1 & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & -1 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

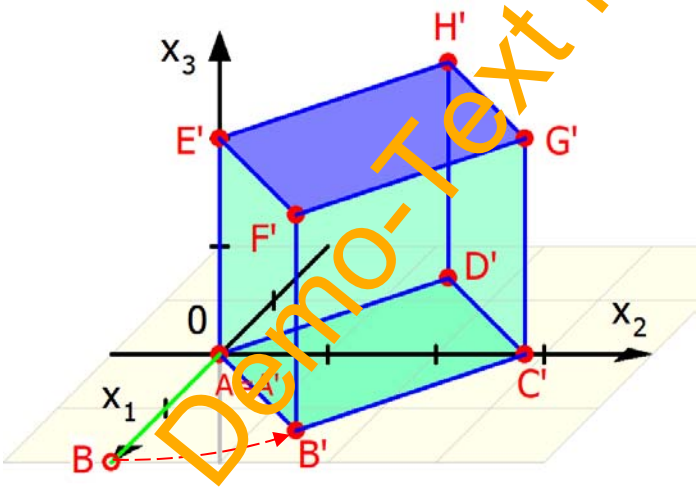


Abb. 8

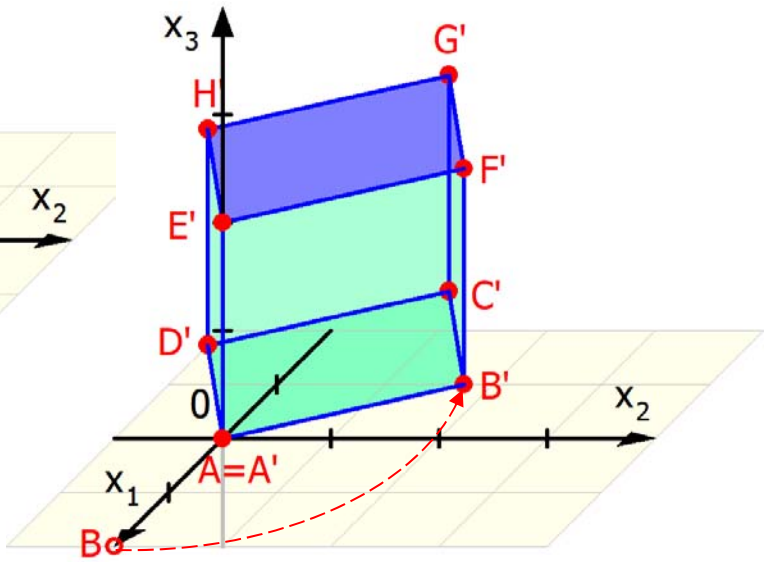


Abb. 9

Demo-Text für www.mathe-cd.de